Skript zur Vorlesung

Analysis I

im Rahmen der Weiterbildung für Lehrer

V.Schulze 2016 FU Berlin

Analysis I - Überblick

Weiterbildung für Lehrer

Dozent: V.Schulze

Analysis I

Zahlbereiche, Zahlenfolgen, Grenzwerte

1. Die rationalen, reellen und komplexen Zahlen

Teil A: Die rationalen und reellen Zahlen.

Als bekannt vorausgesetzt werden die grundlegenden Eigenschaften von

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen),

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ (Menge der ganzen Zahlen),

$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ (Menge der rationalen Zahlen),

$\mathbb{R}$:= Menge der reellen Zahlen

einschließlich der zugehörigen bekannten Verknüpfungen + und $\cdot$.

Insbesondere gilt für $\mathbb{R}$:

Jede reelle Zahl läßt sich als (unendliche) Dezimalzahl schreiben, also in der Form

$$\pm \alpha_1 \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \ldots \quad \text{mit } \alpha_1 \neq 0;\ 0 \le \alpha_i \le 9 \text{ für alle } i$$

Vermeidet man 9-er Perioden, so ist die Darstellung eindeutig.

Für 9-er Perioden gilt

$$\pm \alpha_1 \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1} \ldots \alpha_m \overline{9} = \pm \alpha_1 \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1} \ldots (\alpha_m + 1) \overline{0},$$

wobei $\alpha_m \neq 9$ ist.

Zum Beispiel ist $0,\overline{9} = 1$.

Bem 1 Es existieren bekanntlich ∞ viele reelle Zahlen, die nicht rational sind. ($\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar; $\mathbb{Q}$ ist abzählbar)

Bem 2

Die Grundrechenarten (Verknüpfungen) + und $\cdot$ für $\mathbb{R}$ (analog für $\mathbb{Q}$)

erfüllen die folgenden Regeln:

(A0) $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y,\ x\cdot y \in \mathbb{R}$

(A1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x+y)+z = x+(y+z)$ (Assoziativgesetz für +)

(A2) Für $0 \in \mathbb{R}$ gilt: $0+x = x+0 = x$ f.a. $x \in \mathbb{R}$ (0 heißt neutrales Element bzgl. +)

(A3) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ex ein $x' \in \mathbb{R}$ mit $x'+x = x+x' = 0$
(x' wird bekanntlich mit $-x$ bezeichnet

(A4) $x+y = y+x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (Sprechweise: + ist kommutativ)

(A1') $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ (Assoziativgesetz für $\cdot$)

(A2') Für $1 \in \mathbb{R}$ gilt: $1\cdot x = x\cdot 1 = x$ f.a. $x \in \mathbb{R}$ (1 heißt neutrales Element bzgl. $\cdot$)

(A3') Zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existiert ein x'' mit $x''\cdot x = x\cdot x'' = 1$
(x'' wird bekanntlich mit x^{-1} oder $\frac{1}{x}$ bezeichnet)

(A4') $x\cdot y = y\cdot x$ f.a. $x, y \in \mathbb{R}$ (Sprechweise: $\cdot$ ist kommutativ)

(A5) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$ (Distributivgesetz)
(Wie üblich gilt: Punkt- vor Strichrechnung;
also kann auf Klammern auf der rechten Seite der obigen Gleichung verzichtet werden)

Wegen (A0) heißen + und $\cdot$ Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$.
Wegen (A0)-(A3) heißt $(\mathbb{R}, +)$ Gruppe.
Wegen A(0)-(A4) heißt $(\mathbb{R}, +)$ kommutative Gruppe oder abelsche Gruppe
Wegen A(0)-(A5) heißt $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Körper (Körper der reellen Zahlen)

Analoge Aussagen gelten für $\mathbb{Q}$ (und auch für die komplexen Zahlen, s. Teil B)

Anmerkung (ohne Bew; s. Vorlesung über Algebra/Zahlentheorie)
Aus den obigen Regeln folgt die Gültigkeit der üblichen Rechenregeln für das Vorzeichen; zB $(-a)(-b) = ab$.

In der Analysis ist das Rechnen mit Ungleichungen sehr wichtig. Dies beruht auf den Ordnungsaxiomen der reellen Zahlen.

Bem3 (Ordnungsaxiome)

Für $(\mathbb{R},+,\cdot)$ gilt:

(OA1) Für jedes $x\in\mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:

$$x=0,\quad x>0,\quad -x>0$$

(OA2) $x>0,\ y>0 \Rightarrow x+y>0$

(OA3) $x>0,\ y>0 \Rightarrow x\cdot y>0$

Wegen (OA1)-(OA3) heißt $(\mathbb{R},+,\cdot,>)$ angeordneter Körper.

Ferner wird definiert:

$$x>y :\Leftrightarrow x-y>0$$
$$x\geq y :\Leftrightarrow x-y>0 \text{ oder } x=y$$
$$x<y :\Leftrightarrow y>x$$
$$x\leq y :\Leftrightarrow y\geq x.$$

(Die obigen Aussagen gelten analog für $\mathbb{Q}$).

Bem4 Aus den Ordnungsaxiomen (OA1) - (OA3) folgen alle üblichen Rechenregeln für Ungleichungen.
Diese werden im folgenden ohne Beweis verwendet.

Bsp1

(i) $x>y,\ y>z \Rightarrow x>z$

Beweis: $x>y \underset{\text{Def.}}{\Rightarrow} x-y>0$, $y>z \underset{\text{Def.}}{\Rightarrow} y-z>0$ $\underset{(OA2)}{\Rightarrow} \underbrace{(x-y)+(y-z)}_{=x-z}>0 \underset{\text{Def.}}{\Rightarrow} x>z$

(ii) $x\neq 0 \Rightarrow x^2>0$

Beweis: Nach (OA1) sind nur die beiden Fälle $x>0$, $-x>0$ möglich.

Fall $x>0$: Dann $x\cdot x>0$ nach (OA3).

Fall $-x>0$: Dann $\underbrace{(-x)(-x)}_{=x^2}>0$ nach (OA3).

Bemerkung 5 (Der Betrag)

Für $x \in \mathbb{R}$ wird definiert $|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } -x > 0 \end{cases}$

Dann gilt:

(i) $|x| = |-x| \geq 0$ f.a. $x \in \mathbb{R}$

(ii) $|x| \geq x,\ |x| \geq -x$ f.a. $x \in \mathbb{R}$

(iii) $x > y,\ x' > y' \Rightarrow x + x' > y + y'$

$x \geq y,\ x' \geq y' \Rightarrow x + x' \geq y + y'$

Zum Beweis überlege man sich, welche Ordnungsaxiome bzw. Def. bei jedem Schritt verwendet werden.

Bemerkung 6 (Dreiecksungleichung bzw. Δ-Ungl.)

(i) $|x+y| \leq |x| + |y|$ f.a. $x,y \in \mathbb{R}$

(ii) $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$ (erweiterte Δ-Ungl.)

Man mache sich die Aussagen auch auf der Zahlengeraden klar.

Bew

(i) 1. Fall: $x+y \geq 0$. Dann $|x+y| \underset{\text{Def.}}{=} x+y \underset{\text{Bem 5(ii), (iii)}}{\leq} |x| + |y|$

2. Fall: $x+y < 0$. Dann $|x+y| \underset{\text{Def}}{=} -x-y \leq |x| + |y|$

(ii) $|x| = |x+y-y| \underset{\Delta\text{Ungl}}{\leq} |x+y| + |-y| \underset{\text{Bem 5(i)}}{=} |x+y| + |y| \underset{\text{Bem 5(iii)}}{\Rightarrow} |x| - |y| \leq |x+y|$

Vertauschung von x und y liefert

$|y| - |x| \leq |x+y|$.

Zusammen folgt die Beh.

Bemerkung 7. (archimedisches Ordnungsaxiom)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$.

Dann ex. ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-mal}} > y$

[Der Beweis ergibt sich aus der Konstruktion der reellen Zahlen].

Teil B Die Komplexen Zahlen

Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ (Gilt nur eine andre Schreibweise für das Cartesische Produkt $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)

$a+bi = c+di \iff a=c,\ b=d$

Auf $\mathbb{C}$ werden zwei Verknüpfungen definiert durch

$(a+bi)+(c+di) := (a+c)+(b+d)i,$

$(a+bi)\cdot(c+di) := (ac-bd)+(ad+bc)i$

Schreibweise: $a+0\cdot i = a$ (in diesem Sinn ist $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ und auch $(\mathbb{R},+,\cdot)$ Unterkörper von $\mathbb{C}$).

$0+bi = bi$

$1\cdot i = i$, $(-1)\cdot i = -i$, $a+(-b)i = a-bi$, $a+bi = a+ib$, $a+bi = bi+a$.

Es gilt $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$

$a(b+ci) = ab+aci$

$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

Für $a^2+b^2\neq 0$ gilt $(a+bi)\cdot\underbrace{\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)}_{=(a+bi)^{-1}\ =\ \frac{1}{a+bi}} = 1$ (Schreibweise)

Aus den obigen Rechenregeln folgt

Bem 1 $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein Körper (Körper der komplexen Zahlen)

Sei $z := a+bi \in \mathbb{C}$.

$\bar{z} := a-bi$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl

$a =: \operatorname{Re} z$ heißt Realteil von z

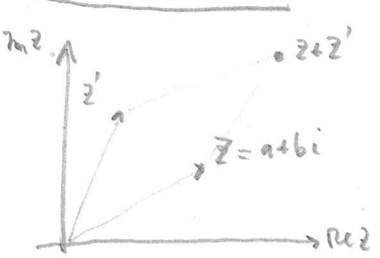
$b =: \operatorname{Im} z$ heißt Imaginärteil von z beachte: $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

Es gilt $z\cdot\bar{z} = a^2+b^2$. ; $\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ (leicht nachzurechnen)

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$ (falls $c^2+d^2\neq 0$)

Bsp $\frac{1}{i} = -i$, $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

Gaußsche Zahlenebene



Den komplexen Zahlen werden bijektiv die Punkte der Gaußschen Zahlenebene zugeordnet bzw. Ortsvektoren.

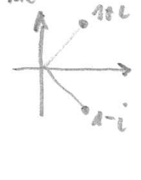
Der Addition in $\mathbb{C}$ entspricht offenbar die Vektoraddition in der Gaußschen Zahlenebene.

$|z| := \sqrt{a^2+b^2}$ (Abstand von z zum Nullpunkt) (Betrag von z)

Es gilt $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$.

$\bar{z}$ entsteht aus z durch Spiegelung an der Re-Teil-Achse.

Bsp



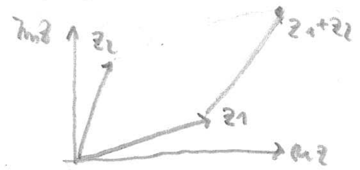
$|1+i| = \sqrt{2}$

Rechenregeln

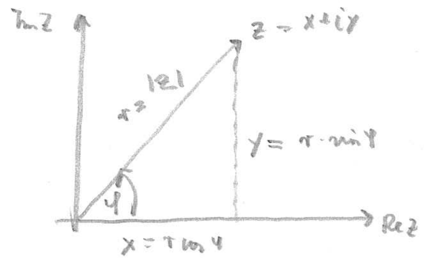
(i) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ ✓

(ii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\quad \left[\, |z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1}\, z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \,\right]$

(iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Δ-Ungleichung) [läßt sich elementar nachrechnen; ist anschaulich geometrisch klar in der Gaußschen Zahlenebene]



Polarkoordinaten für $z \neq 0$.



$$z = x + iy = \underbrace{r}_{=|z|} \underbrace{(\cos\varphi + i \sin\varphi)}_{\text{hat Betrag } 1} \; ; \quad \underbrace{\arg z}_{\text{bis auf Vielfache von } 2\pi \text{ eindeutig bestimmt}} := \varphi$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(Für $z = 0$ ist $r = 0$ und $\arg z$ nicht def.)

Es gilt $\arg \overline{z} = -\arg z$.

Geometrische Bedeutung der Multiplikation

Sei $z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$; $r_1 = |z_1|$

$z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$; $r_2 = |z_2|$

Dann gilt

$$z_1 \cdot z_2 = \underbrace{r_1 \cdot r_2}_{=|z_1||z_2|} \cdot \Big[\underbrace{(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)}_{=\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i \underbrace{(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)}_{=\sin(\varphi_1+\varphi_2)} \Big]$$

(Additionstheoreme für sin und cos)

Polarkoordinatendarstellung für $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = \underbrace{|z_1| \cdot |z_2|}_{=|z_1 z_2|} \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right).$$

(Produkt der Beträge; Addition der Winkel)

Bsp $(1+i)^2 = 2i$
$(-1+i)^2 = -2i$ (rechne nach und deute das Ergebnis geometrisch)

Potenzen komplexer Zahlen

Sei $z = r (\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

Dann: $z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

Im Fall $r = 1$ folgt

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \qquad \text{(Formel von Moivre)}$$

Bsp Berechne $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^j$ für $j = 2, 3, 4, \ldots$ (durch Ausmultiplizieren und geometrisch)

Inverse komplexer Zahlen

Sei $z \neq 0$.

Dann: $\arg \frac{1}{z} \cdot z = 0 = \arg z + \arg \frac{1}{z}$; also $\arg \frac{1}{z} = -\arg z$

$\left| z \cdot \frac{1}{z} \right| = 1 = |z| \cdot \frac{1}{|z|}$, also $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

Für $|z| = 1$ gilt speziell: $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Wurzeln komplexer Zahlen

Sei $z \neq 0$, $z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

$a \in \mathbb{C}$ heißt n-te Wurzel von z, falls $a^n = z$ ist (Schreibweise für a: $\sqrt[n]{z}$).

Beachte: $\sqrt[n]{z}$ ist nicht eindeutig bestimmt (zB ist $\sqrt{1} = 1$ und $\sqrt{1} = -1$)

Mit $\sqrt[n]{z}$ wird auch die Menge aller n-ten Wurzeln von z bezeichnet.

Jede n-te Wurzel von z besitzt den Betrag $\sqrt[n]{|z|}$ (positive reelle n-te Wurzel)

Das Argument α einer n-ten Wurzel aus z besitzt die Eigenschaft:

$n \cdot \alpha = \arg z$ + ganzzahliges Vielfaches von 2π

Die beiden letzten Aussagen ergeben sich offenbar aus den Regeln für die Potenzen komplexer Zahlen.

Also folgt:

Die n-ten Wurzeln von z sind

$$\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + \nu 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + \nu 2\pi}{n} \right) \text{ für } \nu = 0, \dots, n-1.$$

<u>Bsp</u>

$\sqrt{-i} = \pm \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)$

$\sqrt[4]{-4} = 1+i$ (weitere Wurzeln?)

$\sqrt[8]{1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (Man gebe alle 8-ten Wurzeln aus 1 an)

Hinweis: Argumentiere geometrisch in der Gaußschen Zahlenebene.

n-te Einheitswurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Die n-ten Wurzeln aus 1 heißen n-te Einheitswurzeln (EW)

Die n-ten EW sind $\cos \frac{\nu 2\pi}{n} + i \sin \frac{\nu 2\pi}{n}$ für $\nu = 0, \dots, n-1$ (man gebe eine geometrische Interpretation)

Eine n-te EW ist zB. $\zeta_n := \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

Die n n-ten EW sind dann $1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}$.

<u>Bem</u> Multipliziert man z mit ζ_n, so bedeutet dies geometrisch eine Drehung um $\frac{2\pi}{n}$.

Es gilt $\overline{\zeta_n^i} = \zeta_n^{-i}$ (es gilt ja $\zeta_n^i \cdot \zeta_n^{-i} = 1$ und $\zeta_n^i \cdot \overline{\zeta_n^i} = |\zeta_n^i| = 1$)

Ferner gilt $\zeta_n^{-i} = \zeta_n^{n-i}$, da $\zeta_n^n = 1$

<u>Bem</u> $1 + \zeta_n + \dots + \zeta_n^{n-1} = 0$ (Die Summe der n n-ten EW ist 0)

<u>Bew</u>

$$\begin{aligned} S &:= 1 + \zeta_n + \dots + \zeta_n^{n-1} \\ \zeta_n \cdot S &= \phantom{1 +{}} \zeta_n + \dots + \zeta_n^{n-1} + \zeta_n^n \\ \hline (1-\zeta_n) S &= 1 - \zeta_n^n = 0 \end{aligned}$$

<u>Bsp</u> $x^2 + x - 1$ besitzt die NSt $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $\zeta_5 + \bar{\zeta}_5$; also ist $\zeta_5 + \bar{\zeta}_5 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

2. Konvergenz von Folgen, Cauchy Folgen, spezielle Folgen

Def 1 (Folgen)

(i) Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $n \overset{f}{\longmapsto} a_n$.

Dann läßt sich f schreiben in der Form $(a_1, a_2, a_3, \ldots) =: (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (reelle) Folge.

(ii) Seien $n_1, n_2, n_3, \ldots$ natürliche Zahlen mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Dann heißt $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Def 2 (Konvergenz)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Konvergiert gegen die reelle Zahl a (in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$)

$:\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

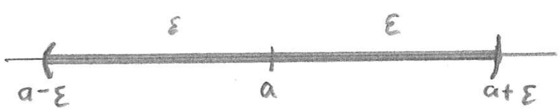
(Beachte: Natürlich hängt n_0 i.a. ab von ε)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt dann Konvergent.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht Konvergiert.

Bem 1 Sei $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

$U_\varepsilon(a) := \{ r \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < r < a + \varepsilon \}$ heißt ε-Umgebung von a



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bedeutet: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben.

Dann gibt es ein n_0, so daß gilt:

$a_n \in U_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq n_0$

Sprechweise: Die Folgenelemente a_n liegen von einer Stelle n_0 ab alle in $U_\varepsilon(a)$.

Def. 2

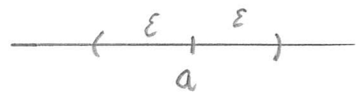
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt $:\Longleftrightarrow$ Ex. $c\in\mathbb{R}$ mit $a_n \leq c$ f. a. $n\in\mathbb{N}$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt $:\Longleftrightarrow$ Ex. $c\in\mathbb{R}$ mit $c\leq a_n$ f. a. $n\in\mathbb{N}$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $:\Longleftrightarrow$ Ex. $c\in\mathbb{R}$ mit $|a_n|\leq c$ f. a. $n\in\mathbb{N}$
($\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben und unten beschränkt).

Bem 2 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Bew $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen a.



Sei $\varepsilon>0$ geg.
Von einer Stelle n_0 ab liegen alle Folgenelemente in $U_\varepsilon(a)$,
also nur endliche a_n außerhalb von $U_\varepsilon(a)$.

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Bem 3 Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Bew Ann: a, b sind zwei verschiedene Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Wähle $\varepsilon>0$, so daß $U_\varepsilon(a)\cap U_\varepsilon(b)=\emptyset$

Dann liegen von einer Stelle ab alle Folgenelemente von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$. Widerspruch.

Bsp 1

(i) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht : klar

(ii) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

Beweis: Sei $\varepsilon>0$ geg.
Dann ex. ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$
(Dies ist anschaulich klar und folgt aus dem Archimedischen Ordnungsaxiom)
Für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq n_0$ ist dann auch $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

(iii) Sei $a\in\mathbb{N}$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ [Bew. analog zu (ii)].

Bem 4 Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a. (folgt direkt aus der Def. des Grenzwertes).

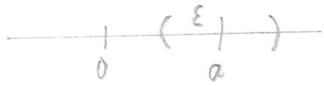
Bem 5 (Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen)

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $c \in \mathbb{R}$. Dann:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \underset{\cdot}{\pm} b_n) = a \underset{\cdot}{\pm} b$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (c\, a_n) = c \cdot a$

(iii) Sei $a \neq 0$.



Dann ex. n_0, so daß $a_n \neq 0$ f.a. $n \geq n_0$ und es gilt

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_0}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

(iv) Ist $a_n \geq 0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ (positive Wurzel)

Bew

(i) für +: $|(a_n+b_n)-(a+b)| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|a_n-a|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{2} \\ \text{für } n\geq n_0}} + \underbrace{|b_n-b|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{2} \\ \text{für } n\geq n_0'}} < \varepsilon$ für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$.

für $\cdot$: $|a_nb_n - ab| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|a_nb_n - a_nb|}_{\substack{\leq |a_n|\,|b_n-b| \\ \leq S|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{S} \text{ für } n\geq n_0}} + \underbrace{|a_nb - ab|}_{= |b|\,\underbrace{|a_n-a|}_{<\frac{\varepsilon}{|b|} \text{ für } n\geq n_0'}} < \varepsilon$ für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$.

$\boxed{S \text{ obere Schranke von } |a_n|}$

(ii) klar

(iii) (Skizze) $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a-a_n|}{|a_n|\cdot|a|} \leq \frac{|a-a_n|}{S} < \varepsilon$ f.a. $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$

Man überlege sich, daß ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $S > 0$ ex., so daß $|a_n|\cdot|a| \geq S$ f.a. $n \geq n_0$ und ein n_0' mit $|a-a_n| < \frac{\varepsilon}{S}$ f.a. $n \geq n_0'$

(iv) Zum Beweis beachte man
$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}.$$

Def 4 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty :\Longleftrightarrow \forall r\in\mathbb{R}\ \exists N(r)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N(r): a_n \geq r.$$

analog wird $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ definiert.

Sprechweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen ∞ (bzw $-\infty$)

oder auch: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ∞ (bzw. $-\infty$).

Bsp 2

Sei $q\in\mathbb{R}$. Dann:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \\ \text{div.} & \text{falls} \\ 1 & \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} q>1 \\ q\leq -1 \\ q=1 \\ |q|<1 \end{matrix}$$

Beweis als Übung

Bem 6 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b = 0$; $b_n \neq 0$ f.a. $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$ (Bew. als Übung)

Bsp 3

(i) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4n^2+1}{2n^3+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)} =$$

falls die Grenzwerte im Zähler und Nenner rechts einzeln ex. u. der Grenzwert im Nenner $\neq 0$ ist nach Bem 5 (Grenzwertsätze)

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

falls die Grenzwerte einzeln ex. nach Bem 5

Bsp 1 (iii)

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \infty$$

analog zu (i), verwende Bem 6

Bem 7 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ (Beweis als Übung)

Bsp 4 $$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n} = 0$$ (nach Bem. 7).

Def 5 (Cauchy-Folgen, CF)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,m \geq n_0\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$

3. Das Vollständigkeitsaxiom, Intervallschachtelung, Bolzano-Weierstraß, Anwendungen

Bem 8

(i) Jede konvergente Folge ist eine CF.

(ii) In $\mathbb{R}$ gilt: Jede CF ist konvergent.
Wegen dieser Eigenschaft heißt $\mathbb{R}$ auch vollständig
(Anmerkung: $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig:
Eine Folge rationaler Zahlen, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, ist eine CF, aber in $\mathbb{Q}$ nicht konvergent; bekanntlich ist ja $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

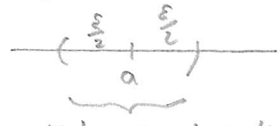
Bew

(i) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

Dann ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ f.a. $n \geq n_0$.

Es folgt für alle $n,m \geq n_0$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$



Intervall hat die Länge ε.

(ii) Die Aussage ergibt sich aus der Konstruktion der reellen Zahlen.

Def 6 (Intervall)

Sei $r_1 \leq r_2$. Dann: $[r_1, r_2] := \{r \in \mathbb{R} \mid r_1 \leq r \leq r_2\}$ (abgeschlossenes Intervall)
$(r_1, r_2) := \{r \in \mathbb{R} \mid r_1 < r < r_2\}$ (offenes Intervall)
$[r_1, r_2) := \{r \in \mathbb{R} \mid r_1 \leq r < r_2\}$ (halboffenes Intervall)
$(r_1, r_2] := \{r \in \mathbb{R} \mid r_1 < r \leq r_2\}$ "

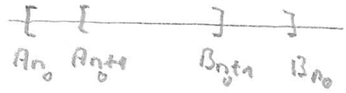
Bem 9 (Intervallschachtelung)

Gegeben sei eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $[A_n, B_n]$ $(n\in\mathbb{N})$
mit $[A_{n+1}, B_{n+1}] \subseteq [A_n, B_n]$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0$.

Dann ex. genau ein $r \in \mathbb{R}$ mit $r \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [A_n, B_n]$.

Beweis

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offenbar eine CF,



denn für alle $n \geq n_0$ gilt $A_n \in [A_{n_0}, B_{n_0}]$

Nach Bem 8 konvergiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, etwa gegen τ.

Da A_n monoton steigt, ist $\tau \geq A_n$ f.a. $n\in\mathbb{N}$

Ferner ist $\tau \leq B_n$ f.a. $n\in\mathbb{N}$; da aus $\tau > B_n$ folgt $A_1, A_2, \dots \leq B_n < \tau$,

also $|A_m - \tau| \geq \tau - B_n$ f.a. $m\in\mathbb{N}$ im Widerspruch zu $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \tau$.

Also ist $\tau \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [A_n, B_n]$.

Andererseits kann $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [A_n, B_n]$ höchstens ein Element enthalten wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (B_n - A_n) = 0$.

Man beachte: Zum Beweis wird benutzt, daß $\mathbb{R}$ vollständig ist.

Bsp 5

(i) Betrachte die Folge der Intervalle $[0, \frac{1}{n}]$ für $n\in\mathbb{N}$.

Dann ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}] = \{0\}$.

(ii) Andererseits gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$.

Bem. 9 läßt sich also nicht auf offene Intervalle übertragen.

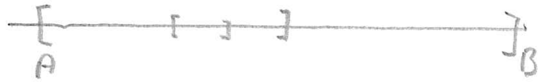
Bem 10 (Bolzano - Weierstraß)

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bew

Nach Voraussetzung liegen die Folgenelemente in einem Intervall $[A, B]$.

Halbiere das Intervall.



Dann enthält mindestens eines der beiden Teilintervalle unendlich viele Folgenelemente. Ein solches Teilintervall wird wieder halbiert. Fortsetzung liefert eine Folge von Teilintervallen.

Das Prinzip der Intervallschachtelung (Bem. 9) liefert: Im Durchschnitt dieser Teilintervalle liegt ein Element r. Dann erhält man leicht eine Teilfolge der gegebenen Folge, die gegen r konvergiert.

Bem 11 (Monotonie-Kriterium)

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend (also $a_n \le a_{n+1}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$) und nach oben beschränkt.
Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend (also $a_{n+1} \le a_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$) und nach unten beschränkt.
Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Bew (i): (Beweis für (ii) analog)
Offenbar ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, besitzt also nach Bem 10 eine konvergente Teilfolge, etwa mit dem Grenzwert r.
Dann konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen r:
Sei $\varepsilon > 0$ geg.
Dann ex. ein Element a_N der Teilfolge mit $a_N \in U_\varepsilon(r)$.
Dann gilt für alle $n \ge N$ auch $a_n \in U_\varepsilon(r)$.

Bsp 6 (wichtige Bsp für Anwendungen)

(i) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ex.

(Der Grenzwert wird mit e bezeichnet; $e \approx 2{,}71$; e ist die Basis des natürlichen Logarithmus)

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(iii) Sei $a>0$. Dann: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

(v) Seien $a>0$, $b>0$. Dann: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$.

Anmerkung: Für $a \in \mathbb{N}$ ist n^a auf „natürliche Weise" def.; für $a \notin \mathbb{N}$ wird n^a später def. (Exponentialfunktionen)

Bew

(i) Wende das Monotonie-Kriterium an:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton steigend:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \frac{\cancel{n}(n-1)\cdots(n-i+1)}{\cancel{n}\, n \cdots n} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1+i}{n}\right),$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\cdots(n+1-i+1)}{(n+1)(n+1)(n+1)\cdots(n+1)} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{1+i}{n+1}\right)$$

Es gilt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 3$ f.a. $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \underbrace{\frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-i+1)}{n}}_{\le 1}$$

$$\le 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \le 3$$

beachte $\frac{1}{i!} \le \frac{1}{2^{i-1}}$

Formel für die geometrische Reihe; s. Abschnitt 2 Bsp 2, Seite 18

(ii) $\sqrt[n]{n}$ ist monoton fallend: $\sqrt[n+1]{n+1} \le \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow (n+1)^n \le n^{n+1}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \le n}_{\boxed{\text{gilt nach (i) für } n \geq 3}}$$

$\sqrt[n]{n}$ durch 1 nach unten beschränkt.

Also nach Bem 11: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ ex.; offenbar ist der Grenzwert $g \geq 1$.

Annahme: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} =: g > 1$; sei $1+g' < g$, $g' > 0$.

Dann gilt für hinreichend große n: $\sqrt[n]{n} \geq 1+g'$ bzw.

$n \geq (1+g')^n = \underbrace{1 + ng + \frac{n(n-1)}{2} g^2 + \ldots}_{> n \text{ für große } n}$ Wid.

(iii) Für $a \geq 1$ folgt die Beh. aus (ii)

Für $a < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$ $\boxed{\text{s. Fall } a > 1}$

(iv) Beweisidee: Man zeige:

Sei $c > 0$ bel. gegeben. Dann ist $n! \geq c^n$ für hinreichend große n.

(v) Beweis erfolgt später im Abschnitt über Reihen. (s. Bsp 7, Seite 21 und Bem 4, Seite 19)

Unendliche Reihen

4. Konvergenz unendlicher Reihen, absolute Konvergenz

Def 1 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

$s_n := a_1 + \ldots + a_n$ heißt n-te Partialsumme von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt unendliche Reihe.

Schreibweise für $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oder $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so wird der Grenzwert ebenfalls mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Allgemeiner muß e. Reihe nicht mit dem Summanden a_1 beginnen, sie kann analog auch die Form $a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots$ besitzen mit $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Bsp 1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ist nicht konvergent.

Bem 1 (Grenzwertaussagen für unendliche Reihen)

Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent; sei $c \in \mathbb{R}$.

Dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ und für die Grenzwerte gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Bew: Die Aussagen folgen aus den entsprechenden Aussagen für Folgen (Bem 5, Seite 10)

Bem 2 Wir werden sehen, daß

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergiert, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nicht.

Bsp 2 (geometrische Reihe)

Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{falls } |q| < 1 \\ \text{divergent} & \text{falls } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Bew: Es gilt $S_n := 1 + q + \dots + q^n$

$$q S_n = q + \dots + q^n + q^{n+1},$$

also $(1-q) S_n = 1 - q^{n+1}$,

also $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Die Beh. folgt aus Bsp. 2 Seite 11.

z.B. gilt $\sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$

Bsp 3 (harmonische Reihe)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

Bew: $S_{2^n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}}^{2^{n-1} \text{ Summanden, jeder Summand ist } \geq \frac{1}{2^n}}}_{\geq \frac{1}{2}} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$

Die Partialsummen sind also nicht nach oben beschränkt.

Bsp 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

Bew: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$S_n := 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$\leq 1 + \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2}}_{\left(1-\frac{1}{2}\right)} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)} + \dots + \underbrace{\frac{1}{(n-2)(n-1)}}_{\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)n}}_{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Def 2 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $:\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent

5. Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Bem 3 (Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n \geq m \geq n_0 : \underbrace{|a_m + \dots + a_n|}_{=|S_n - S_m|} < \varepsilon$, wobei S_n die n-te Partialsumme, S_m die m-te Partialsumme ist.

Bew Folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen.

Bemerkung 4

(i) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (nach Bsp 3); aber es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Bew (i)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Sei $\varepsilon>0$ geg.

Nach Bem 3 ex ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $|\underbrace{S_n - S_{n-1}}_{= a_n}| < \varepsilon$.

Bemerkung 5

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch konvergent.

Bew

Die Beh. ergibt sich aus Bem 3 wegen $|\sum_{i=m}^{n} a_i| \leq \sum_{i=m}^{n} |a_i|$ $\boxed{\Delta\text{-Ungl.}}$

Bemerkung 6

(i) (Majorantenkriterium für Reihen)

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent ; $|a_n| \leq b_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Sprechweise: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) (Minorantenkriterium für Reihen)

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, $0 \leq b_n \leq a_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Sprechweise: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist e. divergente Minorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Bew: (i) Klar nach Bem 11, Seite 14 (Monotonie-Krit. für Folgen)

(ii) Nach Bem 11, Seite 14 sind die Partialsummen von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nicht nach oben beschränkt; dann die von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch nicht; also ist nach Bem 2, Seite 9 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

Bemerkung 7 (Quotientenkriterium) (s. auch Seite 32)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, falls ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ ex. und ein $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\text{mit } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \text{ f.a. } n \geq n_0 \qquad (*)$$

Insbesondere ist $(*)$ offenbar erfüllt, falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$; aber nicht falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ ist.

(Später werden wir sehen: Ex. der limes nicht, so kann der limes superior betrachtet werden; s. Seite 32, Bem 2)

Bew

Es gilt $|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq \dots \leq q^n |a_0|$;

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_0| \cdot q^n$ ist eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Bsp 5 Mit Hilfe des Quotientenkriteriums läßt sich nicht entscheiden, ob $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert.

Bemerkung 8 (Wurzelkriterium) (s. auch Seite 32)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, falls ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ ex. und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \text{ f.a. } n \geq n_0. \qquad (**)$$

Insbesondere ist $(**)$ offenbar erfüllt, falls $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, aber nicht, falls $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent, falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für ∞ viele n

Bew

(i) $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ f.a. $n \geq n_0$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ist eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(ii) Folgt aus Bem 4.

Bsp 6 Mit Hilfe des Wurzelkriteriums läßt sich nicht entscheiden, ob $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert.

<u>Bemerkung 9</u> (Leibniz-Kriterium)

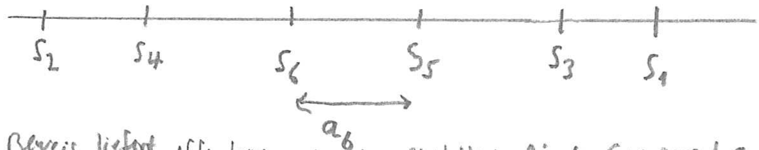
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls die folgenden 3 Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $a_{n+1} \cdot a_n < 0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ (Sprechweise: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist eine alternierende Reihe)

(ii) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (oder gleichwertig: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$).

<u>Beweis:</u>
Sind (i) - (iii) erfüllt, so bilden die Partialsummen S_n eine Cauchy-Folge.
Sei oBdA $a_1 > 0$:



Der Beweis liefert offenbar auch eine Abschätzung für den Grenzwert g: $g \in [S_{n+1}, S_n]$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bsp 7</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ ($k \in \mathbb{N}$) ($a > 1$) konvergiert nach dem Wurzelkrit.:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^k}{a^n}} = \frac{1}{a}.$$

$\boxed{\text{beachte: } \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1}$

<u>Bsp 8</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert (der Grenzwert ist e, ohne Beweis)

Dies ergibt sich leicht aus dem Quotientenkriterium und auch aus dem Wurzelkriterium (beachte: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, Bsp 6(iv), Seite 15).

<u>Bsp 9</u> $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (alternierende harmonische Reihe) ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium. (der Grenzwert ist $-\ln 2$; s. An II).

<u>Bsp 10</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ konvergent für $c > 1$, divergent für $c \leq 1$.

<u>Bew:</u> Im Fall $c \leq 1$ ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante.
Im Fall $c > 1$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^c} + \frac{1}{3^c}\right)}_{\leq 2 \cdot \frac{1}{2^c} = \frac{1}{2^{c-1}}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^{n-1})^c} + \dots + \frac{1}{(2^n - 1)^c}\right)}_{\leq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^c} = \left(\frac{1}{2^{c-1}}\right)^{n-1}} + \dots$$

Die geometrische Reihe $1 + \frac{1}{2^{c-1}} + \frac{1}{(2^{c-1})^2} + \dots$ konv., da nach Vor. $c-1$ positiv.

6. Spezielle Reihen, Multiplikation unendlicher Reihen

Bem 10

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + - \dots$ ist divergent;

die Folge der Partialsummen ist $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

Die Reihe $(1-1) + (1-1) + \dots$ ist konvergent;

die Folge der Partialsummen ist $0, 0, 0, \dots$

Also: Das Setzen von Klammern kann das Konvergenzverhalten einer Folge verändern.

(ii) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Durch das Setzen von Klammern bleibt die Folge konvergent und der Grenzwert ändert sich nicht, denn es gilt:
Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und besitzt denselben Grenzwert.

Bem 11

(i) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

Bei einer Umordnung der Reihenfolge der Summanden bleiben die absolute Konvergenz und der Grenzwert erhalten. (Bew. als Übung)

(ii) Für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen ist die Aussage in (i) falsch.

Bsp: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \dots$ ist konvergent;

die Partialsummen sind $1, 1-\frac{1}{2}, 1, 1-\frac{1}{3}, \dots, 1, 1-\frac{1}{n}, \dots$

Die Summe der positiven Summanden divergiert gegen ∞ (harmonische Reihe).

Ordne die Reihe wie folgt um:

Nehme die ersten positiven Summanden bis die Partialsumme ≥ 1 ist; nehme danach den ersten negativen Summanden.

Nehme die folgenden positiven Summanden bis die Partialsumme ≥ 2 ist; nehme danach den zweiten negativen Summanden.

Nehme die folgenden positiven Summanden bis die Partialsumme ≥ 3 ist; nehme danach den dritten negativen Summanden; usw.

Die entstehende Reihe divergiert gegen ∞.

Bem 12

Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ absolut konvergent.

Summiert man die Produkte $a_n \cdot b_m$ $(n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$ in irgendeiner Reihenfolge auf, so erhält man eine sog. Produktreihe von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$.

Diese ist wieder absolut konvergent.

Sie konvergiert stets gegen das Produkt der Grenzwerte von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ (ohne Bew.).

Spezialfall (Cauchy-Produkt)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_1 b_n + \dots + a_n b_1)}_{\text{dies ist die Summe aller Summanden, bei denen die Summe der Indizes } (n+1) \text{ ist.}}$$

(wegen der Konvergenz darf beliebig geklammert werden, s. Bem 10 (ii)).

Offene, abgeschlossene, kompakte Mengen

7. Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen, der Satz von Heine-Borell

Def 1 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ (ε-Umgebung von x_0)

$x_0-\varepsilon$ x_0 $x_0+\varepsilon$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

x_0 innerer Punkt von M $:\Longleftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subseteq M$.

M offen $:\Longleftrightarrow$ M besitzt nur innere Punkte

Bsp 1 $\mathbb{R}$, $U_\varepsilon(x_0)$; $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $(1,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x\}$ sind offene Mengen ; $\emptyset$ (leere Menge) ist offen.

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ ist nicht offen.

Bem 1
(i) Die Vereinigung offener Mengen ist offen
(ii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen
Bew folgt unmittelbar aus Def. 1

Bsp 2 $(0, 1+\frac{1}{n})$ offen f.a. $n \in \mathbb{N}$;

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1+\frac{1}{n}) = (0,1]$ nicht offen

<u>Def 2</u> Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

$\complement M := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \notin M \}$ heißt Komplement von M.

M abgeschlossen $:\Longleftrightarrow$ $\complement M$ offen.

<u>Bsp 3</u>

$\emptyset, \mathbb{R}, [a,b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \}$, $\{a\}$ sind abgeschlossene Mengen

$(a,b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b \}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

<u>Bem 2</u>

(i) Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

(ii) Die Vereinigung <u>endlich</u> vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

<u>Bew</u> (i) Klar nach Bem 1 (i); beachte

$$\complement \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$$

(ii) Klar nach Bem 1 (ii); beachte

$$\complement \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \complement A_i$$

<u>Bsp 4</u> $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{[\tfrac{1}{n}, 1]}_{\text{abgeschlossen}} = (0,1]$ ist nicht abgeschlossen

<u>Satz 1</u> Sei M abgeschlossen. Dann gilt:

Sei a Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in M$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $a \in M$.

(Es gilt auch die Umkehrung, ohne Bew.)

<u>Bew</u> Annahme: $a \notin M$; also $a \in \underbrace{\complement M}_{\text{offen}}$. Dann ex ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq \complement M$.

Es folgt $|a - a_n| \geq \varepsilon$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch.

Def 3 (überdeckungen)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

Sei $\{M_i \mid i \in I\}$ eine Menge von offenen Mengen.

$\{M_i \mid i \in I\}$ heißt (offene) überdeckung von M, wenn $M \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$.

Die überdeckung heißt endlich, wenn $\{M_i \mid i \in I\}$ nur endlich viele Elemente enthält.

Eine (endliche) Teilmenge von $\{M_i \mid i \in I\}$, die Überdeckung von M ist, heißt (endliche) Teilüberdeckung von $\{M_i \mid i \in I\}$.

Bsp 5

$(0,1]$ besitzt $\{(\frac{1}{n}, 2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ als offene überdeckung;

eine endliche Teilüberdeckung gibt es nicht.

Def 4 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann:

M kompakt $:\Leftrightarrow$ Jede offene überdeckung von M besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Satz 2 (Heine-Borel)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann:

M kompakt $\Leftrightarrow$ M beschränkt und abgeschlossen.

Bew:

$\Rightarrow$

M ist nicht beschränkt:

$\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine offene Überdeckung von M.

Nach Voraussetzung ex. eine endliche Teilüberdeckung;

also ist M beschränkt.

M ist abgeschlossen:

Zeigen: $\complement M$ ist offen.

Sei $x \in \complement M$.

Für jedes $m \in M$ sei $U_{\varepsilon_m}(m)$ eine Umgebung von m mit $U_{\varepsilon_m}(m) \cap U_{\varepsilon_M}(x) = \emptyset$.

Dann ist $\{U_{\varepsilon_m}(m) \mid m \in M\}$ eine offene Überdeckung von M.

Dies besitzt nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{\varepsilon_{m_1}}(m_1), \dots, U_{\varepsilon_{m_n}}(m_n)\}$.

Sei $\varepsilon' := \min\{\varepsilon_{m_1}, \dots, \varepsilon_{m_n}\}$.

Dann ist $U_{\varepsilon'}(x) \cap U_{\varepsilon_{m_i}}(m_i) = \emptyset$ für $i = 1, \dots, n$; also $U_{\varepsilon'}(x) \cap M = \emptyset$,

also $U_{\varepsilon'}(x) \subseteq \complement M$.

$\Leftarrow$: Annahme: M besitzt eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Sei $M \subseteq [a,b]$.

Durch Intervallhalbierung erhält man eine Folge von Intervallen I_n $(n \in \mathbb{N})$, so daß $I_n \cap M$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Speziell ex. ein $a_n \in I_n \cap M$ f. a. $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, der Grenzwert a liegt in M (nach Satz 1).

a werde überdeckt durch die offene Menge $I_{n_a} \cap M$.

Dann ex. ein $\varepsilon > 0$ mit $a \in U_\varepsilon(a) \subseteq I_{n_a} \cap M$.

Für hinreichend große n ist dann $I_n \cap M \subseteq U_\varepsilon(a) \subseteq I_{n_a} \cap M$.

Widerspruch dazu, daß $I_{n_a} \cap M$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

<u>Bem 3</u>

Sei $r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Dann enthält $U_\varepsilon(r)$ mindestens eine rationale Zahl und eine irrationale Zahl

<u>Bew</u> Die Ex. einer rationalen Zahl in $U_\varepsilon(r)$ ergibt sich aus der Dezimaldarstellung der reellen Zahlen.

Die Ex. nicht rationaler Zahlen in $U_\varepsilon(r)$ ergibt sich daraus, daß $U_\varepsilon(r)$ nicht abzählbar ist, aber $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

8. Häufungspunkte von Folgen und Mengen, Supremum, Infimum

Def1 (Häufungspunkt einer Folge)

$a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $:\Longleftrightarrow$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ex. ∞ viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon$

Bem1 $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Longleftrightarrow$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine Teilfolge, die gegen a konvergiert

Bew: als Übung

Bsp1 $(0,1,0,1,0,1,\dots)$ besitzt die Häufungspunkte 0 und 1

Bem2 Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge (nach Bolzano-Weierstraß; Bem 10, Lek 13), also nach Bem1 auch einen Häufungspunkt.

Bsp2 $(0,1,0,2,0,3,0,4,\dots)$ ist unbeschränkt, 0 ist ein Häufungspunkt.

$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt die Häufungspunkte 1 und -1.

Bem3 Eine konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert (Bew. klar)

Def2 (Häufungspunkt einer Menge)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$. Dann:

h Häufungspunkt von M $:\Longleftrightarrow$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ex. ∞ viele $m \in M$ mit $|m - h| < \varepsilon$

Offenbar gilt

Bem4 h Häufungspunkt von M $\Longleftrightarrow$
Für jedes $\varepsilon > 0$ ex. mindestens ein $m \in M$ mit $|m - h| < \varepsilon$ u. $m \neq h$.

Bsp3 $\{0,1\}$ besitzt keinen Häufungspunkt

$(a,b) := \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$ besitzt genau die Elemente

$[a,b] := \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$

als Häufungspunkte.

Eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt keinen Häufungspunkt.

<u>Bem 5</u> Jede unendliche beschränkte Menge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

<u>Bew</u> durch Intervallschachtelung.

<u>Satz 1</u> (Folgenkompaktheit)

M kompakt $\Longleftrightarrow$

Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Elementen aus M besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M.

<u>Bew</u>

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge nach Bem 2, der Grenzwert liegt in M, da M abgeschlossen ist (Satz 1, Seite 25).

$\Leftarrow$ Offenbar ist M beschränkt. M ist abgeschlossen (siehe Satz 1, Seite 25).

Def 3 (Supremum, Infimum)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann:

x obere Schranke von M $:\Leftrightarrow$ $m \leq x$ f. a. $m \in M$

x kleinste obere Schranke von M $:\Leftrightarrow$ x obere Schranke von M, und es ex. keine kleinere obere Schranke von M.

Eine kleinste obere Schranke von M heißt Supremum von M : $\sup M$.

M nach oben beschränkt $:\Leftrightarrow$ M besitzt eine obere Schranke

Analog: untere Schranke von M
M nach unten beschränkt
größte untere Schranke von M : Infimum von M ; $\inf M$.

Bsp 4

$[0,1)$ besitzt eine (viele) obere Schranke; z.B. 2 ; $\sup [0,1) = 1$.

$[0,1)$ besitzt eine (viele) untere Schranken; z.B. -2 ; $\inf [0,1) = 0$.

$[0,\infty)$ besitzt keine obere Schranke, also auch kein Supremum.

Def 4

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann:

x Maximum von M $:\Leftrightarrow$ x Supremum von M und $x \in M$

x Minimum von M $:\Leftrightarrow$ x Infimum von M und $x \in M$

Bsp 5 $[0,1)$ besitzt kein Maximum; $\sup [0,1) = 1 \notin [0,1)$.

$[0,1)$ besitzt das Minimum 0 ; $\inf [0,1) = 0 \in [0,1)$.

Bem 6

(i) Jede nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

(ii) Jede nach unten beschränkte Menge besitzt ein Infimum

Bew

(i) [für (ii) analog] Beweis durch Intervallschachtelung.

Halbiere das Intervall $[a, s]$.

Wähle die linke Hälfte, falls b obere Schranke von M,

sonst die rechte Hälfte.

Wiederholung liefert eine Folge von Intervallen $([c_n, d_n])_{n \in \mathbb{N}}$.

Dabei ist d_n obere Schranke von M f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Die Intervalllänge der Intervalle $[c_n, d_n]$ konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$.

Jedes Intervall $[c_n, d_n]$ enthält ein Element $a_n \in M$.

Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ; sei a der Grenzwert.

Dann gilt:

a obere Schranke von M :

Gelte $a < m$ für ein $m \in M$.

Dann ex. d_n mit $a \leq d_n < m$.

Widerspruch, da d_n obere Schranke von M

a kleinste obere Schranke von M :

Gelte $a' < a$ für ein $a' \in M$.

Dann ex. c_n mit $a' < c_n \leq a$.

Widerspruch, da c_n keine obere Schranke von M.

Bem 7 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und abgeschlossen.

Dann $\sup M \in M$ (d.h. M besitzt ein Maximum)

Bew Der Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Bew. von Bem 5 liegt in M, da M abgeschlossen (s. Satz 1, Seite 25).

9 Limes superior, Limes inferior

Bemerkung 1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.

Dann besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens einen Häufungspunkt (s. Bem 2, Seite 28).

Die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offenbar beschränkt, besitzt also auch ein Supremum (nach Bem 5, Seite 31)

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n :=$ Supremum aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(Limes superior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ ist auch Häufungspunkt der Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

also auch das Maximum aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Analog:

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n :=$ Minimum aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Limes inferior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Setze $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \infty$, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt;

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty$, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach unten beschränkt.

Bsp 1

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,0,1,0,1,\dots)$: Häufungspunkte $0, 1$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$: Häufungspunkte 0; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,2,3,4,\dots)$: Keine Häufungspunkte; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ex. nicht.

Bem 2 Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Dann ist a der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (nach Bem 2, Seite 28),

also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

Aus dem Quotientenkriterium bzw. Wurzelkriterium (s. Bem 7 und 8 Seite 20) ergibt sich

Bem 3 (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{|a_n|} < 1$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

Stetigkeit

10. Stetigkeit in einem Punkt, Grenzwert einer Funktion

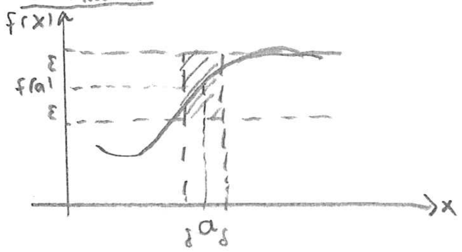
Def 1 (Stetigkeit)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, $a \in D$. Dann:

f stetig in a $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

(δ hängt natürlich ab von ε)

anschaulich



Sei $\varepsilon > 0$ geg.

Dann ex. ein $\delta > 0$, so daß gilt:

Für alle $x \in U_\delta(a)$ liegt $f(x)$ im schraffierten Rechteck

f stetig $:\Leftrightarrow$ f stetig in a f.a. $a \in D$.

Bem 1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$,

$a \in D$ kein Häufungspunkt von D (d.h. es ex. ein $\delta^* > 0$ mit $U_{\delta^*}(a) \cap D = \{a\}$.

Dann ist f stetig in a

Bew Klar nach Def 1, da für jedes $\varepsilon > 0$ stets $\delta = \delta^*$ gewählt werden kann.

Bsp 1 Eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist stets stetig nach Bem 1.

Def 2 (Grenzwert einer Funktion)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung,

a Häufungspunkt von D (d.h. in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen ∞ viele Elemente aus D).

Man beachte: Es wird nicht $a \in D$ gefordert.

Dann:

$f(x)$ konvergiert an der Stelle a gegen den Grenzwert b (in Zeichen: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = b$) $:\Leftrightarrow$

Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$, $x_n \neq a$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

(zugelassen ist auch $a = \pm\infty$ bzw. $b = \pm\infty$)

Analog wird der rechtsseitige Grenzwert (betrachte nur $x_n > a$)

und der linksseitige Grenzwert (betrachte nur $x_n < a$) definiert.

Anmerkung zu Def 2

In Def 2 bleibt unberücksichtigt, ob bzw. wie $f(a)$ definiert ist!

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Ist $f(a)$ nicht definiert (also $a \notin D$) und ex $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = b$, so heißt

f in a stetig ergänzbar und durch $f(a) := b$ wird f in b stetig ergänzt.

Bsp 1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x^2+1)\cancel{(x-1)}} = 1.$

Satz 1

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$; $a \in D$ Häufungspunkt von D.

Dann:

$$f \text{ stetig in } a \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \text{, d.h. } f\Big(\underbrace{\lim_{x\to a} x}_{=a}\Big) = f(a)$$

[Funktionswert und Grenzwertbildung sind vertauschbar]

Bew: folgt direkt aus den Definitionen 1 und 2.

Bsp3

(i) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x) = x$ f.a. $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig [wähle $\delta = \varepsilon$] [δ unabhängig von x_0]

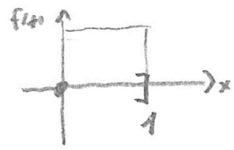
(ii) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ gegeben und $c > 0$ eine Konstante mit $|f(x) - f(x)| < c|x - y|$ f.a. $x, y \in D$.

Dann ist f stetig (Lipschitz-Stetigkeit) [wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$]
δ unabhängig von x_0

(iii) Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Dann ist f in 0 nicht stetig.

Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, aber $f(0) = 0$.



(iv) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x) := \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Dann ist f in 0 nicht stetig.

Für $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ ist $f(x_n) = 1$, also $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1$.

Für $x_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ ist $f(x_n) = -1$, also $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -1$.

(v) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Dann ist f in keinem Punkt stetig

beachte: $U_\varepsilon(r)$ enthält stets rationale und nicht rationale Zahlen (s. Bem 3, Seite 27)

11. Stetige Funktionen und kompakte Mengen, Zwischenwertsatz

Satz 2

(i) Die Hintereinanderschaltung stetiger Funktionen ist stetig

(ii) Summe, Differenz, Produkt stetiger Funktionen ist wieder stetig.

(iii) Sei f stetig in a, $f(a) \neq 0$.

Dann ist in einer hinreichend kleinen ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ auch $f(x) \neq 0$

f.a. $x \in U_\varepsilon(a)$ und $\frac{1}{f}$ ist stetig in a.

Bew

(i)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(a) \arrow[r, "g"] & g\circ f(a) \end{tikzcd}$$

Sei $\varepsilon > 0$ geg.

Dann ex. $\delta_1 > 0$ mit: $y \in U_{\delta_1}(f(a)) \Rightarrow g(y) \in U_\varepsilon(g(f(a)))$,

Ferner ex $\delta_2 > 0$ mit $x \in U_{\delta_2}(a) \Rightarrow f(x) =: y \in U_{\delta_1}(f(a))$.

Also: $x \in U_{\delta_2}(a) \Rightarrow g\circ f(x) \in U_\varepsilon(g(f(a)))$.

(ii) Ergibt sich aus den entsprechenden Grenzwertsätzen für Folgen.

Bsp 3 Polynomabbildungen sind stetig (nach Satz 2)

Satz 3 (ohne Bew.)

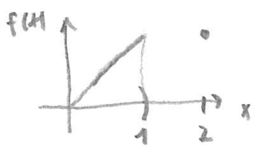
Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, D kompakt, f umkehrbar.

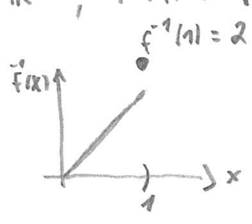
Dann ist auch f^{-1} stetig.

Bsp 4 Sei $f: [0,1) \cup \{2\} \to [0,1]$ def. durch $f(x) = x$ für $x \in [0,1)$, $f(2) = 1$

Dann ist f stetig und f ist umkehrbar.

Es gilt $f^{-1}: [0,1] \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = x$ für $0 \le x < 1$; f^{-1} ist in 1 nicht stetig.





Satz 4 (ohne Bew.)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, D kompakt (also beschränkt und abgeschlossen).

Dann ist $f(D)$ ebenfalls kompakt.

(*) Speziell nimmt $f(D)$ ein Minimum und ein Maximum an (s. Bem 7, Seite 31)

Satz 5 (Zwischenwertsatz)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

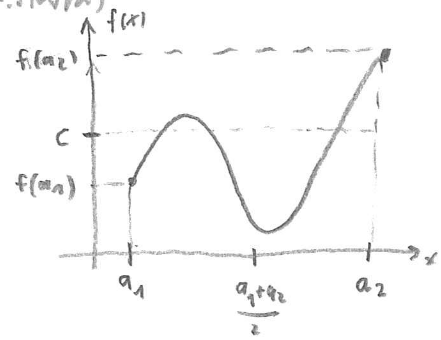
(i) Dann ist das Bild $f([a,b])$ ebenfalls ein abgeschlossenes Intervall

(ii) Speziell folgt:

Gilt $f(a_1) \leq c \leq f(a_2)$, so ex. $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = c$

(jeder Wert zwischen $f(a_1)$ und $f(a_2)$ wird als Funktionswert angenommen)

[ξ ist nicht notwendig eindeutig bestimmt, s. Skizze)



Beweis

Wegen Satz 4(*) genügt es, (ii) zu beweisen.

Beweis durch Intervallschachtelung.

Halbiere das Intervall $[a_1, a_2]$.

Ist $f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) \leq c$, so betrachte man die rechte Hälfte;

Ist $f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) > c$, so betrachte man die linke Hälfte.

Wiederholung liefert eine Intervallschachtelung $[c_n, d_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

$f(c_n) \leq c \leq f(d_n)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Dann ex. ein $\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [c_n, d_n]$ und es folgt $f(\xi) = c$ wegen der Stetigkeit von f.

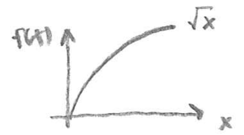
Bsp 5 Sei $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$; n ungerade.
Dann besitzt f mindestens eine reelle Nullstelle.

Bew Sei oBdA $a_n > 0$.

Dann $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Also ex. $c_1 \in \mathbb{R}$ mit $f(c_1) < 0$; $c_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(c_2) > 0$.

Die Beh. folgt dann aus Satz 5 und Bsp 4.



Bsp 6 Sei $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x) = \sqrt{x}$.

Dann ist f stetig.

Bew f ist stetig auf $[0, a]$ für jedes $a > 0$

als Umkehrabbildung von $g: [0, \sqrt{a}] \to \mathbb{R}$; $g(x) = x^2$ nach Satz 3 und Bem 4

12. Gleichmäßige Stetigkeit, Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Mengen, Beispiele

Def 1 (gleichmäßige Stetigkeit)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann:

(i) $f: D \to \mathbb{R}$ stetig (auf D) :$\Leftrightarrow$

$$\forall x_0 \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$ (s. Def. 1, Seite 33)

(beachte: δ hängt von ε und von x_0 ab)

(ii) $f: D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig (auf D) :$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_0 \in D \ \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(beachte: δ hängt von ε ab, kann aber <u>unabhängig</u> von der Stelle x_0 gewählt werden)

Bem 1 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ geg.
Für eine Konstante $c > 0$ gelte $|f(x) - f(x_0)| \le c|x - x_0|$ f.a. $x, x_0 \in D$ (Lipschitz-Bedingung).
Dann ist f gleichmäßig auf D [wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, s. Bsp 3, Seite 35]

Satz 1 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, D kompakt.
Dann ist f gleichmäßig stetig auf D [ohne Bew.]

Satz 2 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf D; $D' \subseteq D$.
Dann ist f auch gleichmäßig stetig auf D'.

Bew klar nach Def. der gleichmäßigen Stetigkeit

Bsp 1

Sei $D := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$,

sei $f : D \to \mathbb{R}$ def. durch $f(t) := 2x^2 + x + 3$.

Dann ist f stetig nach Bsp 3, Seite 36.

(i) Sei $x_0 \geq 0$ gegeben, sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Bestimme δ, so daß gilt: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

Sei $|x - x_0| < \delta$. Dann:

$$|f(x) - f(x_0)| = |(2x^2 + x + 3) - (2x_0^2 + x_0 + 3)| = |2(x^2 - x_0^2) + (x - x_0)|$$

$$= |2(x-x_0)(x+x_0) + (x-x_0)| = \underbrace{|x - x_0|}_{\substack{<\delta \\ \text{nach Vor.}}} \cdot (\underbrace{2(x+x_0)}_{\substack{< 3x_0,\ \text{falls } \delta < x_0,\ \text{also} \\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta < 2x_0}} + 1)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{falls } \delta < x_0}}{<} \delta \cdot (6x_0 + 1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{falls } \delta < \frac{\varepsilon}{6x_0+1}}}{<} \varepsilon$$

Also kann $\delta < \min\left\{x_0, \frac{\varepsilon}{6x_0+1}\right\}$ gewählt werden

(ii) Ist f auf D gleichmäßig stetig?

Gezeigt wird: f nicht auf D gleichmäßig stetig.

Annahme: f auf D gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0$ geg.

Dann ex. ein $\delta > 0$, so daß gilt: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ f.a. $x, x_0 \in D$.

Es gilt aber

$$|f(x) - f(x_0)| \underset{\text{s.o.}}{=} |2(x+x_0)(x-x_0) + (x-x_0)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speziell für } x = x_0 + \frac{\delta}{2}}}{=} 2\left(2x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \geq 2\delta x_0.$$

also $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ für $x_0 > \frac{\varepsilon}{2\delta}$.

Widerspruch zur Annahme.

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

13. Konvergenz von Funktionenfolgen, gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen, gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

Bem 1 Bekanntlich gilt für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (s. Def 2, Seite 8)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varepsilon>0\; \exists n_0\; \forall n\geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon. \qquad (n_0 \text{ hängt ab von } \varepsilon).$$

Def 1 (punktweise Konvergenz)

Gegeben seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ für $n = 1, 2, ..$

(i) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf D (punktweise) gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall x\in D\; \forall \varepsilon>0\; \exists n_0\; \forall n\geq n_0\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (n_0 \text{ hängt ab von } \varepsilon \text{ und von } x)$$

$$\left(\underset{\text{Bem 1}}{\Longleftrightarrow}\; \forall x\in D\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right).$$

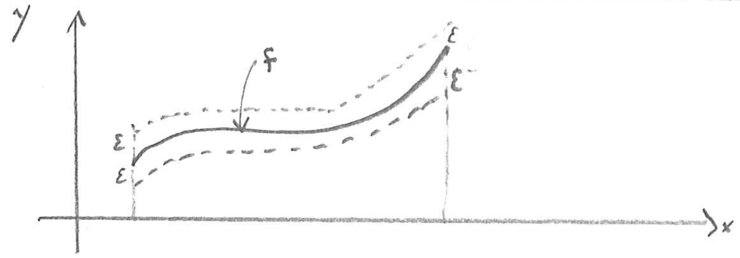
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

(ii) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf D gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\; \exists n_0\; \forall n\geq n_0\; \forall x\in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (n_0 \text{ hängt ab von } \varepsilon, \text{ aber nicht von } x)$$

Schreibweise: $g - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Anschauliche Deutung der gleichmäßigen Konvergenz



Sei $\varepsilon > 0$ geg.

Von einem Index n_0 ab (d.h. für alle $n \geq n_0$) liegen alle Funktionswerte $f_n(x)$ im ε-Streifen um g.

Bsp 1

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ def. durch $f_n(x) = x^n$.

Dann: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$.

Beh: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen f.

Bew: Ann: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f.

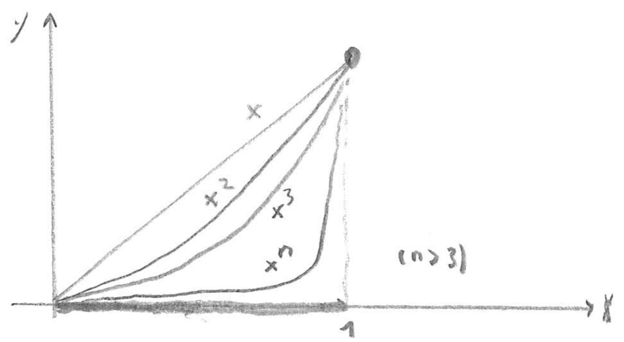
Gegeben sei ε mit $0 < \varepsilon < 1$.

Nach Annahme $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, so daß gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ f.a. $n \geq n_0$, $x \in [0,1]$.

Es gilt aber $|f_{n_0}(x) - f(x)| \underset{\boxed{\text{falls } 0 \leq x < 1}}{=} |x^{n_0} - 0| \underset{\boxed{\text{falls } x > \sqrt[n_0]{\varepsilon}}}{>} \varepsilon$

Widerspruch

(ii) Die Beh. in (i) gilt offenbar auch, wenn der Definitionsbereich $[0,1]$ ersetzt wird durch $[0,1)$.



Der Graph wird bei Annäherung an $x = 1$ für wachsendes n immer steiler.

Ist $\varepsilon > 0$ geg., so ist δ um so kleiner zu wählen, je dichter x bei 1 liegt.

Dies erklärt anschaulich die Beh. in Bsp 1 (i).

Satz 1

Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ stetig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Gelte $g\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ auf D.

Dann ist die Grenzfunktion $f: D \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann:

$$|f(x) - f(x_0)| \underset{\boxed{\Delta\text{-Ungl.}}}{\leq} \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \text{ f.a. } x \in D \text{ und } n \geq n_0} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}},$$

(wegen der glm. Konv.)

$n := \max\{n_0, n_0'\}$ und $|x - x_0| < \delta$ für geeignetes δ

für alle $n \geq n_0'$ (wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$)

also $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, falls $|x - x_0| < \delta$

Bem 2

(i) Die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen muß nicht stetig sein (s. Bsp 1 (i)).

(ii) Ist die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen stetig, so muß die Funktionenfolge nicht gleichmäßig konvergent sein (s. Bsp. 1 (ii))

Bem 3

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergent, so auch auf D', falls $D' \subseteq D$.

Bew: Klar nach Def.

Satz 2

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$; seien f und alle f_n auf D stetig, sei x_0 Häufungspunkt von D.

Dann:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)}_{= f_n(x_0)} \underset{\boxed{\text{Def. von } f}}{=} f(x_0) \underset{\boxed{\text{da } f \text{ stetig u. } x_0 \text{ Häufungspkt von } D}}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) \underset{\boxed{\text{Def. von } f \text{ als Grenzfunktion der } f_n}}{=} \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

da f_n stetig, x_0 Häufungspkt von D

(Die Grenzwertbildungen sind vertauschbar.

14. Funktionenreihen, Majorantenkriterium

Gegeben seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Unter der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ versteht man die Funktionenfolge der Partialsummen. Konvergiert die Folge der Partialsummen, so wird die Grenzfunktion ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ bezeichnet.

Natürlich kann die Reihe auch beginnen bei $n_0 \in \mathbb{Z}$ [analoge Def.]

<u>Bsp 1</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konv $\Leftrightarrow |x|<1$.

Für $|x|<1$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (geometrische Reihe) s. Bsp 2, Seite 18

<u>Bem 1</u>

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ auf D gleichmäßig konvergent und sind alle f_n auf D stetig, so ist auch die Grenzfunktion auf D stetig (nach Satz 1, Seite 42)

<u>Satz 1</u> (Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n}_{\in \mathbb{R}}$ konvergent und $|f_n(x)| \leq b_n$ f. a. $n \in \mathbb{N}$ (bzw. alle $n \geq n_0$) und alle $x \in D$).

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig konvergent auf D.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt dann konvergente, konstante Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

<u>Bew</u> Ergibt sich aus dem Cauchy-Kriterium und der Abschätzung

$$\left|\sum_{i=N}^{K} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=N}^{K} b_i \quad \text{(Die Abschätzung ist unabhängig von } x\text{)}.$$

<u>Bsp 2</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ hat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ als konvergente, konstante Majorante (s. Bsp 4, Seite 18)

Satz 2

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$. Dann

(i) (Quotienten-Kriterium für Funktionenreihen)

Sei $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| \leq q$ f.a. $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $n \geq n_0$); $f_1(x)$ auf D beschränkt.

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ auf D gleichmäßig konvergent und auch $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ (s. Bem 5, Seite 19)

(ii) (Wurzelkriterium für Funktionenreihen)

Sei $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq q$ f.a. $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $n \geq n_0$).

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ auf D gleichmäßig konvergent und auch $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ (s. Bem 5, Seite 19)

Bew

(i) $|f_{n+1}(x)| \leq q\,|f_n(x)| \leq \cdots \leq q^n |f_1(x)| \leq q^n \cdot s$;

Sei s eine obere Schranke von $f_1(x)$ auf D

also ist $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cdot s$ eine konvergente, konstante Majorante

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ist offenbar eine konvergente, konstante Majorante.

15 Potenzreihen, Konvergenzradius und Konvergenzbereich von Potenzreihen, Stetigkeit von Potenzreihen, Beispiele

Def 1 Eine Funktionenreihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$ heißt Potenzreihe (Dabei ist $a_n \in \mathbb{R}$ f.a. n und $x_0 \in \mathbb{R}$).

x_0 heißt Entwicklungspunkt der Potenzreihe.

Satz 1

(i) Für den Konvergenzbereich einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ sind die folgenden 3 Fälle möglich:

(a) Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$

(b) Konvergenz nur für $x = x_0$

(c) Ex. $r > 0$, so daß gilt:

Die Potenzreihe konvergiert für alle x mit $|x-x_0| < r$ (sogar absolut).

Die Potenzreihe divergiert für alle x mit $|x-x_0| > r$.

r heißt Konvergenzradius der Potenzreihe;

im Fall (i) setzt man auch $r = \infty$

im Fall (ii) setzt man auch $r = 0$

Für $|x-x_0| = r$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

$x_0 - r$ und $x_0 + r$ heißen Randpunkte des Konvergenzintervalls $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Skizze:

$(x_0 - r, x_0 + r)$ heißt Konvergenzintervall.

(ii) Ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, so ist $r = \infty$

Ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$, so ist $r = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Ist $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt (also $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$), so ist $r = 0$

(iii) Ex. $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| =: r$, so ist r der Konvergenzradius

Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$, so ist $r = \infty$.

Achtung: Hier ist der Limes zu betrachten, nicht der Limes superior.

Bew (von Satz 1)

(i) und (ii): Wende das Wurzelkriterium für Reihen an für jedes x. (s. Bem 8, Seite 20, bzw. Bem 3, Seite 32)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n (x-x_0)^n} = |x-x_0| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \text{gdw}$$

$$|x-x_0| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

(iii) Zum Beweis wende man das Quotientenkriterium an. (s. Bem 3, Seite 32 bzw. Bem 7, Seite 20)

Satz 2

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r.

Dann:

(i) Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf $[x_0-r', x_0+r']$ für jedes $0<r'<r$.

(ii) Die Grenzfunktion der Potenzreihe ist auf (x_0-r, x_0+r) stetig.

Bew

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |x_0+r'|^n$ ist eine konvergente, konstante Majorante, falls $x_0 \geq 0$;

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n |x_0-r'|^n$ ist eine konvergente, konstante Majorante, falls $x_0 < 0$.

(ii) folgt aus (i) und Satz 1, Seite 42.

Satz 3 (Identitätssatz)

Besitzen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)$ im Intervall (x_0-r, x_0+r) $(r>0)$ dieselbe Grenzfunktion, so gilt $a_n = b_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ (ohne Bew)

Satz 4 (Abelsche Grenzwertsatz)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ besitze den endlichen Konvergenzradius r.

Sei die Reihe für x_0+r konvergent.

Dann ist die Grenzfunktion an der Stelle x_0+r linksseitig stetig

(analog rechtsseitig)

(ohne Bew)

Bsp 1

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $r=1$, konvergent für $x \in (-1,1)$;
divergent für $x \notin [-1,1]$; divergent für die Randpunkte ± 1.

[s. Bsp 6 (ii), Seite 15]

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$: $r=1$, da $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$; divergent für $x=1$ (harmonische Reihe)
konvergent für $x=-1$ (alternierende harmonische Reihe)

(Grenzfunktion: $\ln(1-x)$, s. Ma II)

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$: $r=1$, konvergent für $x = \pm 1$ (s. Bsp 6 (iii), Seite 15)

[s. Bsp 6, (iv), Seite 15]

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$: $r=\infty$ wegen $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \infty$.

Die Grenzfunktion ist die Exponentialfunktion e^x (später)

(v) $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

$r = \sqrt{2}$ wegen $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Divergent für $x = \pm\sqrt{2}$ (klar)

(vi) $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$: $r=\infty$ (Grenzfunktion ist $\sin x$, später, Seite 53)

[analog zu (iv)]

(vii) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$: $r=\infty$ (Grenzfunktion ist $\cos x$, später, Seite 53)

Elementare Funktionen

16. Exponentialfunktionen, Logarithmus, die allgemeine Potenz

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Ziel: Definiere a^r für alle $r \in \mathbb{R}$

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist a^n definiert (wie üblich durch die Multiplikation auf $\mathbb{R}$).

Für $m \in \mathbb{N}$ ist $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ definiert (als Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \xmapsto{f} x^m$)

Für $q \in \mathbb{Q}$ ($q = \frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$) ist dann a^q definiert durch $a^q = \sqrt[m]{a^n}$.

Noch zu definieren bleibt a^r für $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Möglichkeit

Sei $r \in \mathbb{R}$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e. Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = r$.

Dann: $a^r := \lim\limits_{n \to \infty} a^{q_n}$.

Soll die Exponentialfunktion a^x stetig sein, so muß a^r wie oben definiert werden.

Zu zeigen bleibt:

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}$ ex. und ist unabhängig von der Wahl der Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Möglichkeit

Einführung der Exponentialfunktion mit Hilfe von Potenzreihen.

Fall A (Die Exponentialfunktion zur Basis e)

Sei $e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Def 1 Sei $x \in \mathbb{R}$.

Dann wird definiert

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \qquad (= \exp(x))$$

Beachte: Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist $r = \infty$; s. Bsp 1, (iv), Seite 47.

Dann gilt

Bem 1

(i) e^x ist stetig auf $\mathbb{R}$ (als Potenzreihe)

(ii) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ (Beweis unter Verwendung des Cauchy-Produktes) (s. Bem 12, Seite 23)

(iii) $e^0 = 1$ (klar),
$e^1 = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (ohne Bew.)

(iv) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ [Bew: $e^{-x} \cdot e^x \underset{(ii)}{=} e^0 \underset{(iii)}{=} 1$]

(v) $e^x > 0$ f.a. $x \in \mathbb{R}$ [klar für $x \geq 0$; für $x < 0$ klar nach (iv)]

(vi) e^x streng monoton steigend [klar für $x \geq 0$, für $x < 0$ klar nach (iv)]

(vii) Für $x \geq 0$ gilt $e^x \geq 1 + x$ [klar nach Def.],
also $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.
Ferner gilt $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ [nach (iv)].

(viii) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist surjektiv [klar nach (i), (vii) und dem Zwischenwertsatz]

Anmerkung (i) – (iii) legt die e-Fkt schon eindeutig fest (ohne Bew.)

Damit stimmt die Def von e^x überein mit der aus Möglichkeit 1 für den Fall $a = e$.

Bem 2 (natürliche Logarithmus)

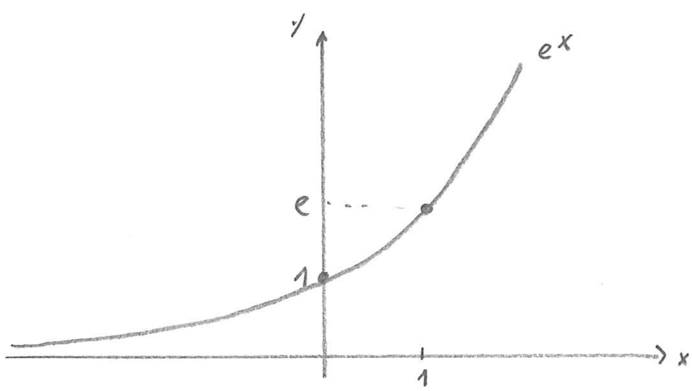
Zu $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ def. durch $x \longmapsto e^x$ existiert die Umkehrabbildung (nach Bem 1, (vi) und (viii))

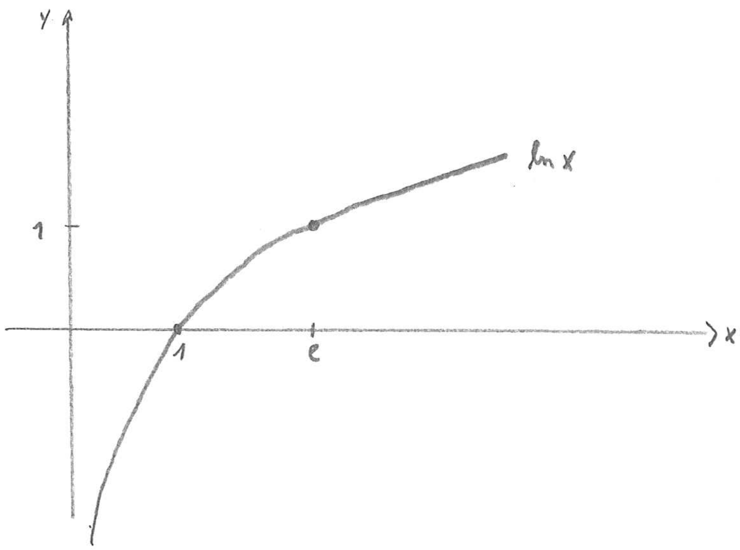
$$\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \ln x \quad \text{(natürlicher Logarithmus)}$$

Bem 3

Es gilt $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

Bew $x \cdot y = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} \underset{\text{Bem 1(ii)}}{=} e^{\ln x + \ln y}$, also $\ln x \cdot y = \ln x + \ln y$.





Den Graphen von $\ln x$ erhält man durch Spiegelung des Graphen von e^x an der Geraden $y = x$, da $\ln$ die Umkehrfunktion von $\exp$ ist.

Fall B (Die allgemeine Exponentialfunktion)

Ziel Definiere a^x für $a>0$ und $x \in \mathbb{R}$.

Def 2 Sei $a \in \mathbb{R}$, $a>0$.
Dann wird $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$\exp_a(x) := e^{x \cdot \ln a} \quad (=: a^x)$$

Die Def. ist plausibel, wenn man beachtet als Merkregel
$$e^{x\cdot \ln a} = \underbrace{(e^{\ln a})^x}_{\text{ist bisher aber nicht definiert.}} = a^x$$

Bem 2 Speziell ist $\exp_e = \exp$, da $\ln e = 1$.

Bem 3 Sei $a>0$. Dann:

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ [Zum Beweis verwende man Bem 1 (iii)]

(ii) $\exp_a$ ist streng monoton steigend,
$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$; $\exp_a$ stetig [analog zu Bem 1]

Def 3 (Logarithmus zur Basis a)

Sei $\log_a : \mathbb{R}^+_+ \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von $\exp_a$ (Logarithmus zur Basis a).
(die Umkehrfunktion existiert nach Bem 3)

Bem 4 offenbar ist $\log_e = \ln$ (nach Bem 2);
für $\log_{10}$ schreibt man auch log.

Bem 5 (wichtige Rechenregeln)
$$\ln a^x = x \cdot \ln a \quad ; \quad (a^x)^y = a^{x\cdot y} \quad ; \quad a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x$$

Beweis als Übung.

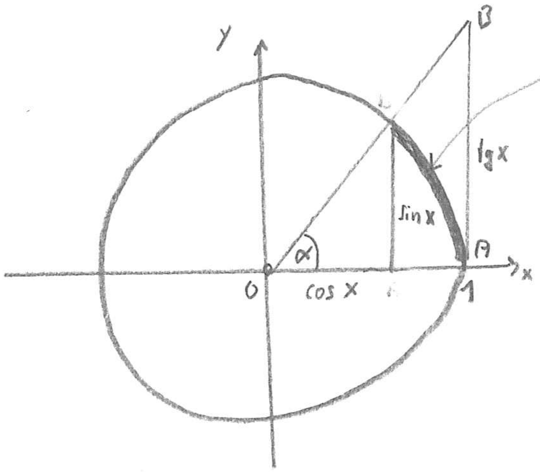
Bem 6 $$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Bew $$\alpha := e^x = \underbrace{e^{x\cdot \ln a \cdot \frac{1}{\ln a}}}_{\underset{\text{Bem 5}}{=} (a^x)^{\frac{1}{\ln a}}} \underset{\text{Bem 5}}{=} a^{\frac{x}{\ln a}} \quad ; \text{ also}$$
$$\ln \alpha = x \quad ; \quad \log_a \alpha = \frac{x}{\ln a}.$$

17 Winkelfunktionen und Potenzreihen, Umkehrfunktionen, hyperbolische Funktionen

Bem 1

Einführung von sin und cos am Einheitskreis (anschaulich mit Hilfsmitteln der Geometrie):



$x :=$ Länge des Kreisbogens
(x ist das Bogenmaß für den Winkel α)

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Fläche des Kreises: $1 \cdot \pi$

Umfang des Kreises: 2π

Fläche des Kreisabschnitts mit dem Winkel α: $\frac{\pi}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2}$ $(*)$

Bekanntlich gilt:

(1) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetige Abbildungen (anschaulich klar)

(2) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos x = \cos(-x)$ (speziell $\underbrace{\sin(-0)}_{=\sin 0} = -\sin 0$, also $\sin 0 = 1$) (anschaulich klar)

(3) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
(Additionstheoreme für sin und cos; ohne Beweis. Merkregel mit Hilfe der geometrischen Deutung der komplexen Multiplikation, leicht)

(4) $\cos 0 = 1$ (anschaulich klar)

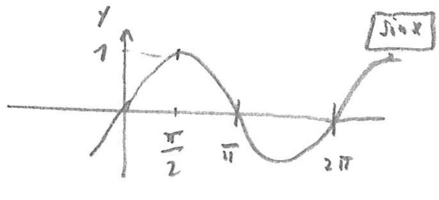
(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sin x} = 1$

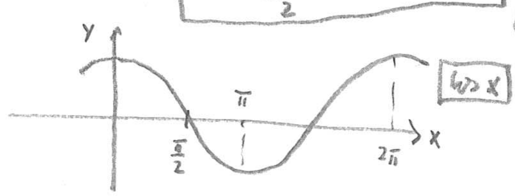
Bew: $\sin x \underset{\boxed{\text{s. Skizze}}}{<} x \underset{\uparrow}{<} \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\text{für } x \to 0} 1$

Flächeninhalt des Kreisabschnitts $\frac{x}{2}$, s. $(*)$, Flächeninhalt des $\Delta(0, A, B)$ ist $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$

nach (4) und (1)

Graphen von sin und cos





Die Verwendung der Anschauung bei der Einführung von sin und cos ist unbefriedigend; ein Rückgriff auf die axiomatische Geometrie aufwändig. Deshalb ist es sinnvoll sin und cos durch Potenzreihen einzuführen.

__Bem 2__ (Einführung von sin und cos mit Hilfe von Potenzreihen)

Die Abb sin und cos sind durch die Eigenschaften (1)-(5) aus Bem 1 eindeutig bestimmt (ohne Beweis) (allerdings sind (1)-(5) nicht unabhängig voneinander).

Sei

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$ (Konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ S. Bsp 1, (iv), Seite 47)

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$ (Konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, S. Bsp 1 (v), Seite 47)

Anmerkung:

Man kann zeigen, daß die Potenzreihen die Eigenschaften (1)-(5) erfüllen. Die Def. von sin und cos aus Bem 2 stimmt also überein mit der Def. von sin und cos in Bem 1.

__Bem 3__ $\sin^2 + \cos^2 x = 1$ (Bew bei der anschaulichen Def. von sin und cos in Bem 1 klar nach Pythagoras; sonst verwende man das Cauchy-Produkt für Reihen

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad , \sin(x+2\pi) = \sin x \quad ,$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad , \cos(x+2\pi) = \cos x$$
(klar bei der Def. von sin und cos nach Bem 1)

Bem 4 (Umkehrfunktionen von sin und cos)

arc cos $: [-1,1] \to [0,\pi]$ ist definiert als Umkehrfunktion von cos

arc sin : $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist definiert als Umkehrfunktion von sin.

beachte: cos ist auf $[0,\pi]$ streng monoton fallend und stetig, nimmt also jeden Wert zwischen -1 und 1 genau ein Mal an; nach dem Zwischenwertsatz;

also ist arc cos definiert.

Analog ist arc sin definiert.

Bem 5 (Hyperbolische Funktionen)

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Verwende die Potenzreihenentwicklung der e-Funktion

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Hyperbolische Funktionen spielen in Anwendungen (z.B. in der Physik) eine große Rolle.

Literatur zur Analysis I (und Analysis II)

E. Behrends	: Analysis
Blatter	: Analysis I, II
Endl., Luh	: Analysis I, II
Forster	: Analysis I, II
Heuser	: Lehrbuch der Analysis I, II
Kemnitz	: Mathematik zum Studienbeginn

Zur Vorbereitung auf die Vorlesung Analysis I wird auch das Studium von <u>Schul-Lehrbüchern</u> empfohlen!

Anmerkung:
Die oben genannten Bücher gehen weit über das vorliegende Skript hinaus.